Специальные разделы высшей математики. Лекции

Содержание

Лекция 1

04.02.2026

Евклидовы пространства

Определение 1 (Метрическое пространство) *Метрическое пространство* — множество M, на котором задана функция $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая свойствам:

1. Положительная определенность:

$$\rho(x, y) \geq 0$$
$$\rho(x, y) = 0 \iff x = y$$

2. Симметричность:

$$\rho(x, y) = \rho(y, x)$$

3. Неравенство треугольника:

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$$

Пример.

1. $x \in \mathbb{R} : \quad \rho(x, y) = |x - y|$
2. $x, y \in \mathbb{R}^n : \quad \rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$
3. Пусть дано:
   - $C_{[a;b]}$ – множество определенных и непрерывных на $[a; b]$ функций,
   - $f(t), g(t) \in C_{[a;b]}, \; t \in [a; b]$.

   Тогда $\rho(f, g) = \max_{t \in [a,b]} |f(t) - g(t)|$.

Определение 2 (Нормированное пространство) *Нормированное пространство* — линейное пространство V, в котором задано отображение $\|x\| : V \to \mathbb{R}$ — *норма*, удовлетворяющее свойствам:

1. Положительная определенность:

$$\forall x \in V. \quad \|x\| \geq 0$$
$$\forall x \in V. \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$$

2. Линейность:

$$\forall x \in V. \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|\lambda x\|$$

3. Неравенство треугольника:

$$\forall x, y \in V. \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Пример.

1. $x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}$
2. $x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_{\max} = \max_{i=\overline{1,\, n}} (|x_i|)$

Определение 3 (Скалярное произведение) *Скалярное произведение* — функция, определенная на вещественном линейном пространстве V вида $(x, y) : V \times V \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая свойствам:

1. Симметричность:

$$(x, y) = (y, x)$$

2. Билинейность:

$$(\lambda x, y) = (x, \lambda y) = \lambda(x, y)$$

3. Положительная определенность:

$$(x, x) \geq 0, \ (x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

Определение 4 (Евклидово пространство) Линейное пространство V, на котором определено скалярное произведение, называется *евклидовым пространством* и обозначается $\mathcal{E}$ *(как маленькая епсилон, но как бы большая).*

$$\dim \mathcal{E} = \dim V$$

Пример.

1. $V = \mathbb{R}^n : \quad (x, y) = |x| \cdot |y| \cdot \cos \angle(x, y)$
2. $V = \mathbb{R}^n : \quad (x, y) = \sum_{i=1}^{n} = x_i y_i$
3. $C_{[a;b]} : \quad (f, g) = \int_a^b f(t) g(t) dt$

Определение 5 (Эрмитово пространство) *Эрмитово пространство* — линейное пространство V на множестве $\mathbb{C}$ со скалярным произведением $(x, y) : V \times V \to \mathbb{C}$, удовлетворяющее свойствам:

1. Полуторалинейность:

$$\forall x, y \in V. \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (zx, y) = z(x, y) = (x, \overline{z} y)$$

2. Эрмитова симметричность:

$$\forall x, y \in V. \quad (x, y) = \overline{(y, x)}$$

3. Положительная определенность:

$$\forall x \in V \setminus \{0\}. \quad (x, x) > 0$$

Теорема 6 (Неравенство Коши-Буянковского)

$$\forall x, y \in \mathcal{E}. \quad |(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)} \cdot \sqrt{(y, y)}$$

Причем равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы x и y линейно зависимы.

Доказательство. Рассмотрим два случая.

1. $\boldsymbol{y = \vec{0}}$.

$$\left(x, \vec{0}\right) = \left(x, 0 \cdot \vec{0}\right) = 0 \cdot \left(x, \vec{0}\right) = 0$$

2. $\boldsymbol{y} \neq \vec{\mathbf{0}}$.

   Пусть $f(t) = (x + ty, x + ty),\ \ t \in \mathbb{R}$.

   Преобразуем f:

$$\begin{aligned} f(t) &= (x, x) + t(x, y) + t(y, x) + (y, y) \\ &= t^2(y, y) + 2t(x, y) + (x, x) \\ &\geq 0 \quad (\text{по определению}) \end{aligned}$$

   Рассмотрим ее дискриминант:

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leq 0 \\ &\implies (x, y)^2 \leq (x, x) \cdot (y, y) \\ &\implies |(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)} \end{aligned}$$

   Теперь покажем линейную зависимость.

$$\begin{cases} \frac{D}{4} \leq 0 \\ f(t) \geq 0 \end{cases} \implies \quad t_0 - \text{единственный корень для } f(t) = 0$$

   Рассмотрим уравнение $f(t) = 0$:

$$f(t) = 0 \quad \iff \quad (x + t_0 y, x + t_0 y) = 0 \quad \iff \quad x + t_0 y = 0 \quad \iff \quad x = -t_0 y$$

   Из последнего перехода следует, что x и y линейно зависимы.

□

Евклидово нормированное пространство

Определение 1 (Норма евклидового пространства) Пусть $\mathcal{E}$ — евклидово пространство. *Нормой* (длиной) вектора $x \in \mathcal{E}$ называется число

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}, \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Свойство 2 (Свойства нормы)

1. $\|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Доказательство.

1. По определению.
2. $(\lambda x, \lambda x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda^2 (x_i, x_i) = \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

   $\|\lambda x\| = \sqrt{\lambda^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2} = |\lambda| \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = |\lambda| \|x\|$
3. **TODO** дописать

□

Евклидовы пространства

Определение 1

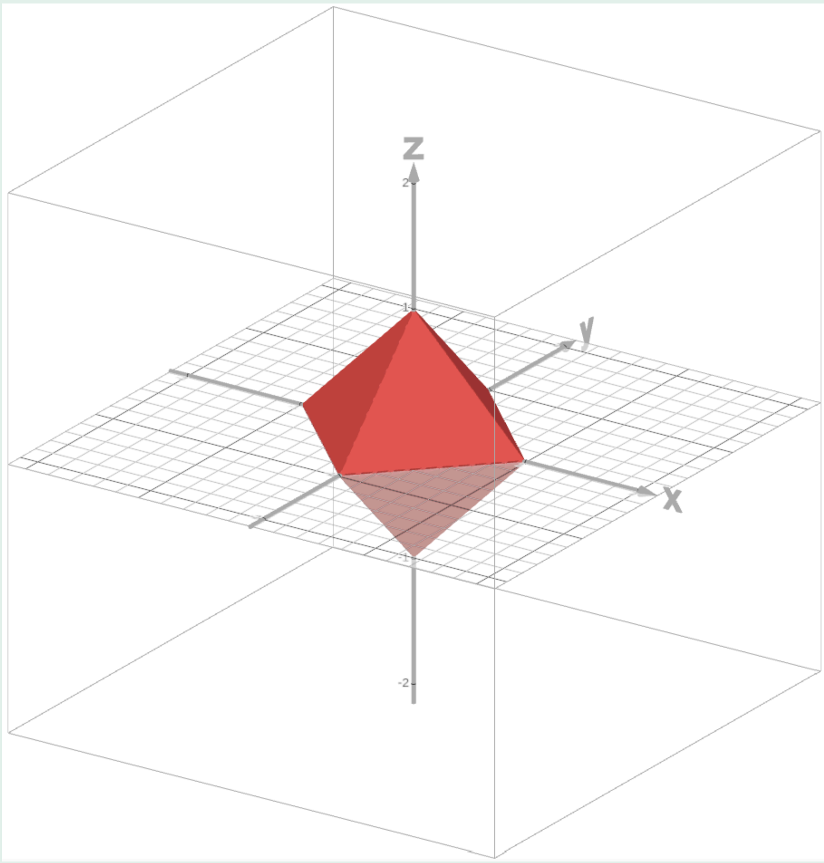
1. Стандартная/евклидова/шаровая/сферическая норма:

$$\|x\|_{\varepsilon} = \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

2. Окаэдрическая/манхэттенская норма:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

Если $\|x\|_1 \leq 1$ при $x \in \mathbb{R}^3$, то ГМТ — октаэдр:



3. Кубическая/чебышевская норма:

$$\|x\|_{\infty} = \max_{i=\overline{1,\ n}} (|x_i|)$$

4. $C_{[a;b]}, \quad \|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt}$

5. Норма матриц — неотрицательное число, характеризующее «размер» или «величину» матрицы. Норма матрицы удовлетворяет всем свойствам нормы. Различные виды представлены в определениях ниже.

Определение 2 (Операторные нормы матриц)

- Столбцовая норма:

$$\|A\|_1 = \max_{i=\overline{1,\ n}} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|$$

- Строчная норма:

$$\|A\|_\infty = \max_{j=\overline{1,\ m}} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

- Спектральная норма (для квадратной матрицы):

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T \cdot A)}$$

где $\lambda_{\max}$ — максимальное собственное значение матрицы $A^T \cdot A$

Определение 3 (Неоператорные нормы матриц) Норма Фробениуса (для квадратной матрицы):

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2} = \sqrt{\operatorname{tr}(A^T \cdot A)}$$

Угол между векторами. Ортогональность

По неравенству Коши-Буянковского:

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \qquad x, y \in \mathcal{E}$$

Отсюда:

TODO дописать

Ортогональные системы векторов

TODO дописать

Теорема 1 (О линейной независимости ортогональной системы) Ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.

Доказательство. От противного. Пусть дана ортогональная система $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$. Тогда, в линейной комбинации вида

$$c_1\vec{a_1} + c_2\vec{a_2} + ... + c_n\overrightarrow{a_n} = \vec{0}$$

есть хотя бы один ненулевой коэффициент c_i.

TODO дописать □