Математический анализ — 2. Лекции

Содержание

Лекция 1 (10.02.2026)

Первообразная. Неопределенный интеграл

Определение 1 (Первообразная) Пусть на $(a; b)$ определена и непрерывна функция $f(x)$. Функция $F(x)$, дифференцируемая на $(a; b)$ называется *первообразной* функции $f(x)$, если

$$F'(x) = f(x) \quad \text{или} \quad dF(x) = f(x)dx$$

Теорема 2 Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — первообразные функции $f(x)$ на $(a; b)$, то они отличаются на константу.

Доказательство. Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — первообразные $f(x)$. Рассмотрим $\varphi(x) = F_1(x) - F_2(x)$.

$$\varphi'(x) = F_{1'}(x) - F_{2'}(x) = f'(x) - f'(x) = 0$$

То есть, $\varphi'(x) = 0$ на $(a; b)$.

Пусть $\varphi(x) = C$, $F_1(x) - F_2(x) = C$, $F_1(x) = F_2(x) = +C$.

По теореме Лагранжа: $[x_0; x]$, x_0 — фиксированная, x — произвольная, $[x_0; x] \subset (a; b)$.

Для $\varphi(x) : \zeta \in [x_0 x]$

$$\begin{gathered}
\varphi(x) - \varphi(x_0) = \varphi'(\zeta)(x - x_0) \\
\varphi'(\zeta) = 0 \\
\varphi(x) - \varphi(x_0) = 0 \\
\varphi(x) = \varphi(x_0)
\end{gathered}$$

□

Определение 3 График первообразной называется *интегральной кривой.*

Определение 4 Множество всех первообразных на $(a; b)$ называется *неопределенным интегралом*:

$$F(x) + C = \int f(x)dx$$

- dx — переменная (выражение) интегрирования
- $f(x)$ — подинтегральная функция
- $f(x)dx$ — подинтегральное выражение

Определение 5 Процесс нахождения неопределенного интеграла называется *интегрированием.* Правильность проверяется дифференцированием.

Свойство 6 (Основные свойства неопределенного интеграла)
1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$
2. $d \int f(x)dx = f(x)dx$

3. $\int dF(x) = F(x) + C$
4. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx, \quad a \neq 0, a \in \mathbb{R}$
5. $\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$

Свойство 7 (Инвариантность формулы интегрирования) $\varphi(x)dx = d\varphi(x)$.

Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(u)du = F(u) + C$, где $u = \varphi(x)$ — произвольная дифференцируемая функция.

Доказательство.

$$\int f(u(x))\varphi'(x)dx = \begin{bmatrix} u = \varphi(x) \\ du = u'(x)dx \end{bmatrix} = \int f(u)du = F(u) + C$$

□

Пример.

$$\int e^{\sin x}\cos x dx = \int e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} + C$$

Свойство 8 (Линейность определенного(???) интеграла)

$$\int a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \ldots + a_n f_{n(x)} = a_1 \int f_1(x)dx + a_2 \int f_2(x)dx + \ldots + a_n \int f_{n(x)}dx$$

Доказательство. Пусть $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_{n(x)}$ — первообразные для соответствующих функций. Тогда

$$\Phi(x) = a_1 F_1(x) + a_2 F_2(x) + \ldots + a_n F_{n(x)}$$

TODO □

Теорема 9 (Таблица интегралов)

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
2. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
3. $\int e^x dx = \frac{e^x}{+} C$
4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
5. $\int \cos x dx = \sin x + C$
6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}\ x + C$
10. $\int \operatorname{sh}\ x dx = \operatorname{ch}\ x + C$
11. $\int \operatorname{ch}\ x dx = \operatorname{sh}\ x + C$
12. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th}\ x + C$

13. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$
14. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
15. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
17. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
18. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$
19. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$
20. $\int \frac{x dx}{x^2 \pm a^2} = \frac{1}{2} \ln\left|x^2 + a^2\right| + C$
21. $\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2 \pm x^2} + C$
22. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \quad$ («высокий» логарифм)
23. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$
24. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C$
25. $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{a^2}{2} \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + C$
26. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ – **TODO** домашка, по частям

Примечание

Вывод формулы 24:

$$\text{TODO}$$

Вывод формулы 25:

$$\text{TODO}$$

Методы интегрирования:

1. Непосредственное интегрирование: преобразование подинтегральной функции (выражения) для сведения интеграла с использованием свойств к одному или нескольким табличным интегралам. Пример:

$$\int \frac{dx}{x^2 + x^4} = \int \frac{(1 + x^2) - x^2}{x^2(1 + x^2)} dx = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1 + x^2}\right) dx = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{1 + x^2} = -\frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x + C$$

2. Замена переменной или подстановка
   1. Подстановка:

$$\int f(x) dx = \begin{bmatrix} x = \varphi(t) \\ dx = u'(t) dt \end{bmatrix} = \int (f(\varphi(t))) \cdot \varphi'(t) dt = \Phi(t) + C = [t = \varphi^{-}1(x)] = F(x) + C$$

   2. Замена переменной (подстановка $\varphi(x) = t$ подбирается):

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \begin{bmatrix} \varphi(x) = t \\ dt = \varphi'(x) dx \end{bmatrix} = \int f(t) dt$$

3. Интегрирование по частям

Теорема 10 Пусть дано:

- $u(x)$ и $v(x)$ определены и дифференцируемы на $(a; b)$
- $u'(x)v(x)$ и $u(x)v'(x)$ имеют первообразные

Тогда:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Так называемая формула интегрирования по частям.

Доказательство.

$$d(uv) = vdu + udv$$

$$\int d(uv) = \int vdu + \int udv$$

$$uv = \int vdu + \int udv$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

□

Хотим проинтегрировать $\int P_n(x) f(x) dx$, где $P_{n(x)}$ — многочлен n-ой степени. Типы $f(x)$:

- I тип: $e^x, a^x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x, \sin x, \cos x, \ldots$
  - $u = P_n(x)$
  - $dv = f(x)dx$
- II тип: $\ln x, \log_a x, \operatorname{arctg}\ x, \operatorname{arcctg}\ x, \arcsin x, \arccos x, \ldots$
  - $u = f(x)$
  - $dv = P_{n(x)} dx$
- III тип: $\sqrt{a^2 - x^2}, \ldots$ (так называемые возвратные интегралы)

Пример:

$$\int x\sqrt{x-3}dx = \begin{bmatrix} t = \sqrt{x-3} \\ t^2 + 3 = x \\ dx = 2tdt \end{bmatrix} = \int (t^2+3)t \cdot 2t \cdot dt$$

$$= 2\int (t^4 + 3t^2)dt$$

$$= \frac{2}{5}t^5 + 2t^3 + C$$

$$= \frac{2}{5}\left(\sqrt{x-3}\right)^5 + 2\left(\sqrt{x-3}\right)^3 + C$$

$$\int \sqrt{2-x^2}dx = \ldots$$